Devoir maison n°2 - Correction

Algèbre :

Exercice 1 : Histoire de trains

1) **A 11 h :** Les trains partent à 9 h donc à 11 h, cela fait 2 h qu'ils sont partis. On utilise alors la formule qui lit la vitesse moyenne à la distance parcourue et au temps de parcours :

$$v = \frac{d}{t}$$. Cela est équivalent à : $d = v \times t$

- Pour le train A : $d = v_A \times t = 100 \times 2 = 200\ km.$

Le train A étant parti de Lille et ayant parcouru 200 km, il se situe donc à 200 km de Lille.

- Pour le train B : $d = v_B \times t = 120 \times 2 = 240\ km.$

Le train B étant parti de Lyon et ayant parcouru 240 km, il se situe donc à 420 km de Lille *(puisque la distance Lille-Lyon est égale à* 660 km)

A 11 h 30 : Les trains sont alors partis depuis 2 h 30 min (Soit 2,5 h), on reprend alors le même raisonnement

- Pour le train A : $d = v_A \times t = 100 \times 2{,}5 = 250\ km.$

Le train A étant parti de Lille et ayant parcouru 250 km, il se situe donc à 250 km de Lille.

- Pour le train B : $d = v_B \times t = 120 \times 2{,}5 = 300\ km.$

Le train B étant parti de Lyon et ayant parcouru 300 km, il se situe donc à 360 km de Lille *(puisque la distance Lille-Lyon est égale à* 660 km)

2) et 3) **Après 3 h de trajet :**

- Pour le train A : $d = v_A \times t = 100 \times 3 = 300\ km.$

Le train A étant parti de Lille et ayant parcouru 300 km, il se situe donc à 300 km de Lille.

- Pour le train B : $d = v_B \times t = 120 \times 3 = 360\ km.$

Le train B étant parti de Lyon et ayant parcouru 360 km, il se situe donc à 300 km de Lille *(puisque la distance Lille-Lyon est égale à* 660 km)

Bilan : Les trains vont se croiser à 12 h, les deux trains se trouvent alors à 300 km de Lille.

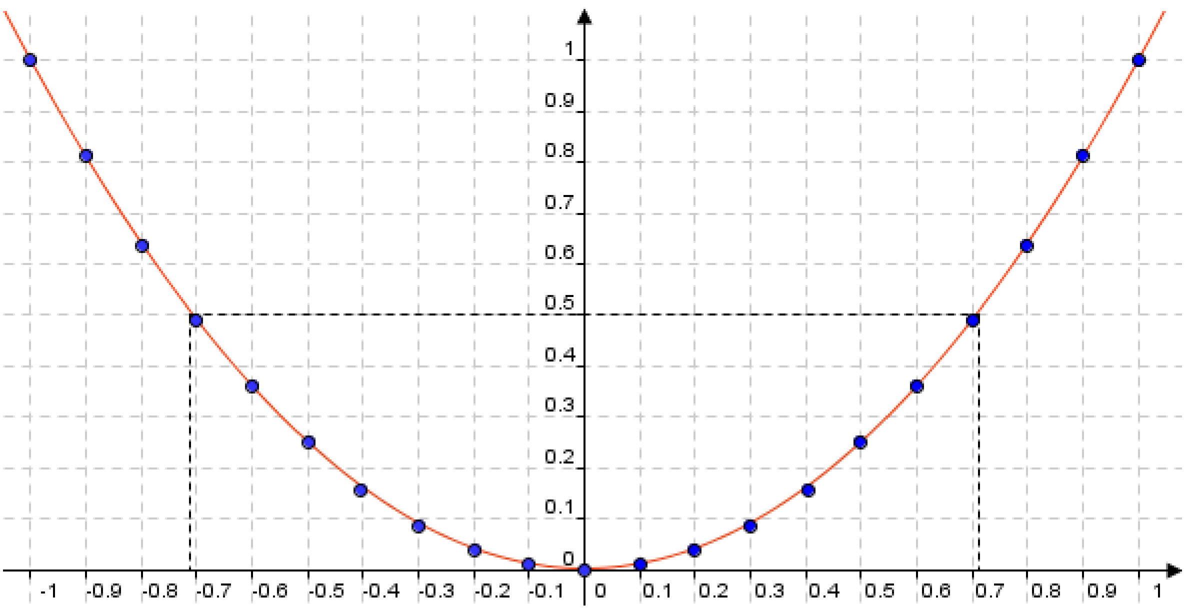
Exercice 2 : Résolution graphique

1) Voici le tableau de valeur que vous deviez obtenir :

x	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	-0.4	-0.3	$-0{,}2$	$-0{,}1$
x^2	1	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x^2	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

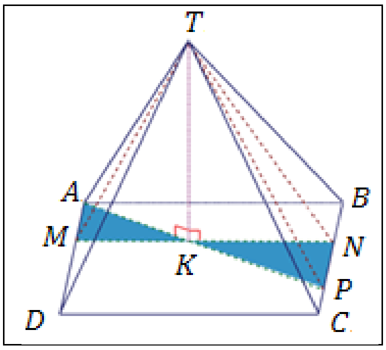
2) Placer dans un repère les points précédents en mettant x en abscisse et x^2 en ordonnée



3) Bilan : Il semble y avoir deux valeurs de x pour laquelle $x^2 = 0{,}5$ *(Voir représentation graphique)* De plus, ces deux nombres semblent être opposés.

Géométrie :

Exercice 3 : Exercice de synthèse



Dans tout ce problème, l'unité est le centimètre.
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 15$ et $AD = 9{,}6$.
Soit P le point du segment $[BC]$ tel que $\frac{BP}{BC} = \frac{5}{6}$
M est un point quelconque de $[AD]$ tel que $AM < 8$ et on pose $AM = x$
La parallèle à (AB) passant par M coupe $[BC]$ en N et $[AP]$ en K.

On considère trois pyramide de même hauteur $[TK]$;
P_1 est la pyramide $TABCD$; P_2 est la pyramide $TAMK$ et P_3 est la pyramide $TPNK$

Partie A :

1) Pour justifier que $BP = 8$, il suffit d'utiliser que $\frac{BP}{BC} = \frac{5}{6}$

   C'est-à-dire que $BP = \frac{5}{6}\,BC = \frac{5}{6} \times 9{,}6 = 8\ cm$

   Dans le triangle ABP rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$
   Et donc, $AC = \sqrt{289} = 17\ cm$

2) Comme le point N appartient au segment $[BP]$, $PN = BP - BN = 8 - x$

   Pour calculer NK, utilisons les triangles ABP et KNP
   Comme :

- Les points A, K et C sont alignés
- Les points B, N et P sont alignés
- (KP) // (AB) *(Côtés opposés du rectangle)*

Alors, d'après le théorème de Thalès, on a :
$$\frac{PK}{PA} = \frac{PN}{PB} = \frac{NK}{AB}$$
On remplace alors par les valeurs numériques :
$$\frac{PK}{AP} = \frac{8-x}{8} = \frac{NK}{15}$$
Cela équivaut à : $NK = 15 \times \left(\frac{8-x}{8}\right)$

3) $$A_{PNK} = \frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{PN \times NK}{2} = \frac{(8-x) \times 15 \times \left(\frac{8-x}{8}\right)}{2} = \frac{15}{16} \times (8-x)^2$$

4) Comme le point K appartient au segment $[MN]$, $MK = MN - NK = 15 - 15 \times \left(\frac{8-x}{8}\right)$

   Après calcul, on trouve donc : $MK = \frac{15}{8}x$

   $$A_{AMK} = \frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{AM \times MK}{2} = \frac{x \times \frac{15}{8}x}{2} = \frac{15}{16}x^2$$

5) Comme l'aire du rectangle $ABCD$ divisée par 15 est égale à $\frac{L \times l}{15} = \frac{15 \times 9{,}6}{15} = 9{,}6\ cm^2$

   Ainsi, pour que l'aire du triangle AMK soit égale à l'aire du rectangle $ABCD$ divisée par 15, il suffit de trouver la *(ou les)* valeur*(s)* de x qui vérifie :
   $$\frac{15}{16}x^2 = 9{,}6$$
   $$x^2 = 9{,}6 \times \frac{16}{15}$$

$$x^2 = 10{,}24$$

Bilan : Pour répondre à la question, il faut donc choisir $x = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2\ cm$

6) Pour que les triangles AMK et PNK aient la même aire, il faut que :

$$\frac{15}{16} \times (8-x)^2 = \frac{15}{16}\,x^2$$

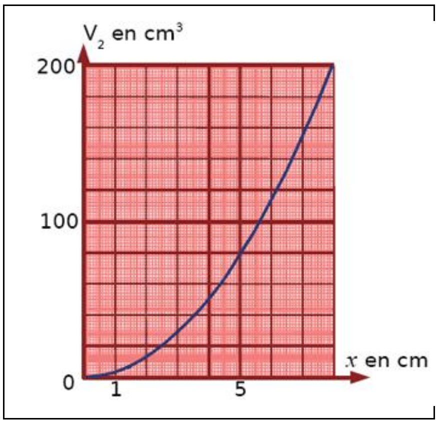
Développons pour cela l'expression $(8-x)^2$, cela équivaut donc à :

$$\frac{15}{16} \times (64 - 16x + x^2) = \frac{15}{16}\,x^2$$

$$60 = 15\ x\ (Après\ simplification)$$

Et donc, $x = \frac{60}{15} = 4cm$

Bilan : Pour répondre à la question, il faut donc choisir $x = 4\ cm$



Partie B : On donne $TK = 10\ cm$.

1) Calcul le volume V_1 de P_1.

$$V_1 = \frac{1}{3} \times A_{Base} \times Hauteur = \frac{1}{3} \times A_{ABCD} \times TK$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 144 \times 10 = 480\ cm^3$$

2) Exprimons en fonction de x le volume $V_2(x)$ en cm^3 de P_2.

$$V_2 = \frac{1}{3} \times A_{Base} \times Hauteur = \frac{1}{3} \times A_{AMK} \times TK$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{15}{16}\,x^2 \times 10 = 480\ cm^3$$

$$V_2 = \frac{25}{8}\,x^2$$

3) Déterminons par lecture graphique :

- Le volume de la pyramide P_2 lorsque $x = 5$.

On lit graphiquement que le volume de la pyramide P_2 est environ égal à $80\ cm^3$ lorsque $x = 5$.

- La valeur de x pour laquelle le volume de P_2 est égale à $50\ cm^3$

On lit graphiquement que la valeur de x pour laquelle le volume de P_2 est égale à $50\ cm^3$ est environ égale à $4\ cm$.

4) Retrouvons ces résultats par des calculs :

- Le volume de la pyramide P_2 lorsque $x = 5$.

Il suffit pour cela de remplacer x par 5 dans l'expression de V_2 trouvée en 2)

$$V_2 = \frac{25}{8}\,x^2 = \frac{25}{8} \times 5^2 = \frac{25}{8} \times 25 \approx 78{,}1\ cm$$

- La valeur de x pour laquelle le volume de P_2 est égale à $50\ cm^3$

On cherche la valeur de x pour laquelle $V_2 = 50$

Cela se traduit par :

$$\frac{25}{8}\,x^2 = 50$$

Ainsi, on trouve donc :

$x^2 = 50 \times \frac{8}{25} = 16$ et donc $x = \sqrt{16} = 4\ cm$